Corso di Laurea in Informatica	Analisi Matematica	codice 254606 23 maggio 2024

Ogni domanda ha una risposta giusta e tre sbagliate. Inserire la lettera corrispondente al risultato corretto nel riquadro. Ogni risposta esatta vale 3, ogni risposta sbagliata vale -1, ogni risposta mancante vale 0.

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

1	c
2	c
3	d
4	d
5	a
6	d
7	a
8	b
9	c
10	b

1. La funzione $f : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \log\left(1 + \frac{1}{x}\right)$

(a) ha massimo

(b) è superiormente limitata ma non ha massimo

▶ (c) è inferiormente limitata ma non ha minimo

(d) ha minimo

Soluzione:

$f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ $\qquad f(x)=\log\left(1+\frac{1}{x}\right)$.

La funzione f è continua.

$$\lim_{x\to0^+} f(x)=\log\left(1+\frac{1}{0^+}\right)=\log(+\infty)=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\log\left(1+\frac{1}{+\infty}\right)=\log 1=0$$

Osserviamo ora che $f(x)>0$ $\forall x>0$, quindi, dal teorema di Weierstrass generalizzato, otteniamo che f non è superiormente limitata, è inferiormente limitata ma non ha minimo.

2. $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{xe^{-x^2}-\sin x}{(x+x^2)\left(\log(1+x)\right)^2}=$

(a) 0 (b) -1 ► (c) $-\frac{5}{6}$ (d) $+\infty$

Soluzione:

per $x\to0$, $e^{-x^2}=1-x^2+o(x^2)$ $\boxed{\text{sostituendo } t=-x^2 \text{ in } e^t=1+t+o(t)}$

$\sin x=x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)$ $\quad\log(1+x)=x+o(x)$ $\quad$ quindi

$$\frac{xe^{-x^2}-\sin x}{(x+x^2)\left(\log(1+x)\right)^2}=\frac{x\left(1-x^2+o(x^2)\right)-\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)\right)}{x(1+x)\left(x+o(x)\right)^2}=$$

$$=\frac{\cancel{x}-x^3+o(x^3)-\cancel{x}+\frac{x^3}{6}+o(x^4)}{x(1+x)\left(x(1+o(1))\right)^2}=\frac{-\frac{5}{6}\cancel{x^3}+o(x^3)}{\cancel{x}(1+x)\cancel{x^2}(1+o(1))^2}\to\frac{-\frac{5}{6}+0}{1\cdot1}=\frac{-5}{6}$$

per $x\to0$.

3. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x\cos x}{1+\cos^2 x}\,dx=$

(a) $1-\frac{\log 2}{2}$ (b) $\frac{1}{2}$ (c) $1+\frac{1}{2}\log\frac{\pi^2+4}{4\pi^2+4}$ ► (d) $\frac{1}{2}\log 2$

Soluzione:

Calcoliamo $\int \frac{\sin x \cos x}{1+\cos^2 x}\,dx$ con la sostituzione

$\cos x = t$, $\frac{dt}{dx} = -\sin x$, $\sin x\,dx = -dt$

$$\int \frac{\sin x \cos x}{1+\cos^2 x}\,dx = -\int \frac{t}{1+t^2}\,dt = -\frac{1}{2}\int \frac{2t}{1+t^2}\,dt = -\frac{1}{2}\log(1+t^2)+c$$

$$= -\frac{1}{2}\log(1+\cos^2 x)+c$$

$$\Longrightarrow \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x \cos x}{1+\cos^2 x}\,dx = \left[-\frac{1}{2}\log(1+\cos^2 x)\right]_0^{\pi/2} =$$

$$= \cancel{-\frac{1}{2}\log(1+0)} + \frac{1}{2}\log(1+1) = \frac{1}{2}\log 2$$

4. La funzione $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $F(x) = \int_2^x e^{(t^4)}\,dt$

(a) è concava in tutto $\mathbb{R}$

(b) è convessa in tutto $\mathbb{R}$

(c) ha un punto di flesso per $x = 2$

► (d) ha un punto di flesso per $x = 0$

Soluzione:

$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = \int_2^x e^{(t^4)}\,dt$

Deriviamo la F due volte per vedere la convessità.

$F'(x) = e^{(x^4)}$ per il teorema fondamentale del calcolo integrale

$F''(x) = e^{(x^4)} \cdot 4x^3$

Dato che $F''(x) > 0$ se $x > 0$, $F''(x) < 0$ se $x < 0$ e $F''(0) = 0$, la F ha un punto di flesso per $x = 0$.

5. $\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2}\,dx$

► (a) converge

(b) non esiste

(c) diverge positivamente

(d) diverge negativamente

Soluzione:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2}\, dx$$

Poniamo $f(x) = \frac{1-\cos x}{x^2}$ e osserviamo che f non è definita per $x=0$. Dividiamo l'intervallo di integrazione in $x=1$.

Poiché $\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{1-\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^3)\right)}{x^2} = \frac{1}{2}$

la funzione f è limitata in un intorno di $x=0$, quindi $\int_0^1 f(x)dx$ converge.

Vediamo ora per $x \to +\infty$.

Poiché $0 \leq \frac{1-\cos x}{x^2} \leq \frac{2}{x^2}$ e $\int_1^{+\infty} \frac{2}{x^2} dx$ converge,

dal criterio del confronto otteniamo che anche $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ converge.

Ne segue che $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ converge.

6. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x-1}{x\sqrt{x}}\, dx$

(a) vale $+\infty$ (b) vale $-\infty$ (c) esiste finito ► (d) non esiste

Soluzione:

Osserviamo che $f(x) = \frac{x-1}{x\sqrt{x}}$ non è limitata in un intorno di 0, dato che

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x-1}{x\sqrt{x}} = \frac{-1}{0^+} = -\infty.$$

Dividiamo l'intervallo di integrazione e studiamo separatamente

$$\int_0^1 f(x)\,dx, \quad \int_1^{+\infty} f(x)\,dx$$

Per $x \to 0^+$ $\quad f(x) = \frac{x-1}{x^{3/2}}$, inoltre $f(x) \leq 0 \ \forall x \in (0,1]$.

Scegliamo $g(x) = \frac{1}{x^{3/2}}$ e osserviamo che $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = -1$.

Dato che $\int_0^1 g(x)\,dx = +\infty$, dal criterio del confronto asintotico

otteniamo che $\int_0^1 f(x)\,dx = -\infty$.

Per $x \to +\infty$ scegliamo invece $g(x) = \frac{1}{x^{1/2}}$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x-1}{x^{3/2}} \cdot x^{1/2} = 1.$$

In questo caso $f(x) \geq 0 \ \forall x \in [1,+\infty)$. Possiamo applicare il criterio del confronto asintotico e ottenere che

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx = +\infty, \text{ dato che } \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{1/2}} = +\infty.$$

Ne segue che $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ non esiste.

7. La successione $a_n = \sqrt[n]{5^n - 3}$, definita per $n \geq 1$

► (a) ha minimo ma non ha massimo

(b) non ha né massimo né minimo

(c) ha sia massimo che minimo

(d) ha massimo ma non ha minimo

Soluzione:

$$a_n = \sqrt[n]{5^n - 3} \qquad n \geq 1.$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(5^n\left(1-\frac{3}{5^n}\right)\right)^{1/n} = \lim_{n\to\infty} 5 \left(1-\frac{3}{5^n}\right)^{1/n} = 5$$

Osserviamo che $a_n < 5$ infatti

$a_n < 5 \iff (5^n - 3)^{1/n} < 5 \iff \cancel{5^n} - 3 < \cancel{5^n}$ sempre verificata.

Dalla versione per successioni del teorema di Weierstrass generalizzato otteniamo che (a_n) ha minimo ma non ha massimo.

8. La serie $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{(-n^3)}$

(a) converge ma non converge assolutamente

► (b) diverge positivamente

(c) converge assolutamente

(d) diverge negativamente

Soluzione:

Poniamo $a_n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{-n^3}$ e osserviamo che $a_n \geq 0 \quad \forall n \geq 1$

Applichiamo il criterio della radice:

$$\sqrt[n]{a_n} = \left(\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{-n^3}\right)^{1/n} = \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{-n^2} = e^{-n^2 \log\left(1-\frac{1}{n^2}\right)} =$$

$$= e^{-n^2\left(-\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} = e^{1+o(1)} \to e > 1$$

quindi la serie diverge positivamente.

9. Nel punto (0,0) la funzione $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{y} & \text{se } y \neq 0 \\ 0 & \text{se } y = 0, \end{cases}$

(a) è continua ma non ha nessuna delle derivate parziali

(b) è continua e ha entrambe le derivate parziali

► (c) non è continua e ha una sola derivata parziale

(d) è differenziabile

Soluzione:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{y} & \text{se } y \neq 0 \\ 0 & \text{se } y = 0. \end{cases}$$

Verifichiamo la continuità nel punto $(0,0)$.

Consideriamo la restrizione di f alla curva $\gamma(t) = (0,t)$, $t > 0$

$$g(t) = f(\gamma(t)) = f(0,t) = -\frac{1}{t}$$

Dato che $\lim_{t \to 0^+} g(t) = -\frac{1}{0^+} = \mp\infty$, la funzione f non è continua in $(0,0)$.

Verifichiamo ora che esiste $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0-0}{h} = 0$$

Per quanto riguarda l'altra derivata parziale

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left(-\frac{1}{h} - 0\right) = -\infty$$

quindi f non è derivabile rispetto a y in $(0,0)$.

10. Siano $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$ e $v = (1,1)$. La derivata direzionale $\dfrac{\partial f}{\partial v}(0,0)$

(a) vale 1 ► (b) non esiste (c) vale 0 (d) vale 2

Soluzione:

$f(x,y) = \sqrt{|xy|}$ $v = (1,1)$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f((0,0)+hv) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,h) - f(0,0)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{|h^2|} - \sqrt{0}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{|h|}{h}$$

$\Leftarrow$ non esiste perché $\lim_{h \to 0^+} \frac{|h|}{h} = 1$ e $\lim_{h \to 0^-} \frac{|h|}{h} = -1$.

quindi non esiste $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)$.

codice 254606	
1	c
2	c
3	d
4	d
5	a
6	d
7	a
8	b
9	c
10	b

Versione n. 80331085

1. c
2. c
3. d
4. d
5. a
6. d
7. a
8. b
9. c
10. b